研究ノート

正準交換関係の導出について

内　山　　智
Satoshi UCHIYAMA

目　次

[Abstract]
On Derivations of Canonical Commutation Relations

A mathematical model of a classical mechanical system that reproduces quantum-mechanical probabilities is considered. The basic idea is that a quantum-mechanical state corresponds to a periodic trajectory in a classical-mechanical phase space. The quantities in this model that correspond to amplitudes of wave functions are considered as values of a functional of a periodic trajectory. Then an observable is realized as a linear mapping of a linear space spanned by these functionals. The linear mapping is induced from an infinitesimal transformation of a periodic trajectory; the infinitesimal transformation of a periodic trajectory is induced from the Hamiltonian vector field with the observable physical quantity. It is shown that the observables obtained from Hamiltonian vector fields with the position and the momentum satisfy the canonical commutation relations by choosing values of parameters of the model appropriately.

1. はじめに

拙稿 [1] において展開された周期的軌道に属する状態のアンサンブルに対する測定の理論に，オブザーバブルとして非可換演算子が自然に導入されることを示す。いわゆる正準交換関係が成り立つためには，この自然な演算子ではなく，状態の準備が行われる前の過去の情報に依存するような変換が必要であることも示唆される。この変換の定義には，周期的であるが故に何度でも同じ状態になり得るということが，本質的である。量子力学の数学的構造は量子確率 [2, 3] のような非可換性を持つが，本稿で展開される理論は，可換な物理量からなる古典力学的実在が周期的な運動をすることにより，この非可換性を許容することになる。

2. 周期的軌道上の対象の測定の理論

この節では，相空間の周期的軌道上の状態になっている対象について物理量を測定したとき，その結果の統計的性質が変化しない測定はどのような条件を満たせば十分であるか

キーワード：量子力学的確率，隠れた変数，周期的軌道，正準交換関係
Key words：Quantum-mechanical Probability, Hidden Variables, Periodic Trajectories, Canonical Commutation Relations

についてまとめておこう [1]。

2.1. 復元可能な変形

対象を取り巻く環境と相互作用した結果，周期的軌道を描く物理的な対象である系 Σ を考えよう。この物理的な対象の相空間を Q で表わすことにする。Q はシンプレクティック多様体であるとしよう。

周期的軌道 α は Q の閉曲線なので，周期 $T_\alpha \in (0,\infty)$ が存在して，$\alpha : [0,T_\alpha] \to Q$ は $\alpha(T_\alpha) = \alpha(0)$ なる写像である。任意の時刻 t に対して $\alpha(t+T_\alpha) = \alpha(t)$ となるように α の定義域を $\mathbb{R}$ に拡張できる。

記述を簡単にするために，二つの曲線を結合する演算子の記号を導入しよう。Q の曲線 $\gamma_1 : [s_1,f_1] \to Q$ と $\gamma_2 : [s_2,f_2] \to Q$ が $\gamma_1(f_1) = \gamma_2(s_2)$ であるとき，それらの結合 $\gamma_1 \rhd \gamma_2$ を次のように定義する：

$$\gamma_1 \rhd \gamma_2(t) := \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [s_1,f_1], \\ \gamma_2(t-f_1+s_2), & t \in [f_1, f_1+f_2-s_2]. \end{cases}$$

同一の周期的軌道を結合した $\alpha \rhd \alpha$ は，周期的軌道であり，その周期は $T_{\alpha\rhd\alpha} = 2T_\alpha$ である。同様に，α を n 回結合した周期的軌道を $\alpha^{n\rhd}$ と書くことにする。すなわち，

$$\alpha^{n\rhd} := \underbrace{\alpha \rhd \cdots \rhd \alpha}_{n}. \tag{1}$$

次の関係が成り立つ。

$$T_{\alpha^{n\rhd}} = nT_\alpha. \tag{2}$$

α に属する全ての状態が準備されるのではなく，それらの内の特定の状態達が離散的に準備されるというのが必要な仮定であった [1]。これは，周期的な現象は，ただ一度ではなく，何度も繰り返されるものであるから，一つの特定の状態になるように制御はできなくても，何度も繰り返し準備できる可能性のある状態のどれかには準備できるであろうという考えに基づいている。時間 t の関数 ϕ_α の選び方を工夫して，$\mathrm{e}^{i\phi_\alpha(t)}$ が同一の値 1 を持つ状態だけが準備される，すなわち $\{\alpha(t) : \mathrm{e}^{i\phi_\alpha(t)} = 1, t \in [0,T_\alpha]\}$ の要素だけを準備できるとしよう。一般性を失うことなく，$\phi_\alpha(\cdot)$ は狭義単調増加関数とすることができる。更に，α の定義域の拡張に伴って，任意の $t \in \mathbb{R}$ については $\mathrm{e}^{i\phi_\alpha(t+T_\alpha)} = \mathrm{e}^{i\phi_\alpha(t)}$ を満たすようにする。

Q 上に $U(1)$ のファイバーを持つ直積バンドルを $Q^\star := Q \times U(1)$ と書くことにする。

$$(\alpha)^\star(t) := (\alpha(t), \mathrm{e}^{i\phi_\alpha(t)}) \tag{3}$$

で定義される $Q^\star$ 内の周期的軌道 $\alpha^\star : [0,T_\alpha] \to Q^\star$ を，α の $Q^\star$ への $U(1)$-リフトと呼ぶ [1]。

周期的軌道 $\gamma : [0,T_\gamma] \to Q$ の $U(1)$-リフト $\gamma^\star = (\gamma, \mathrm{e}^{i\phi_\gamma})$ が，任意の $\delta \in \mathbb{R}$ に対して，

$$\begin{aligned} & \{\gamma(t) : \mathrm{e}^{i(\phi_\gamma(t)+\delta)} = 1, t \in [0,T_\gamma]\} \cap \\ & \{\alpha(t) : t \in [0,T_{\alpha_i}]\} \\ = \; & \{\gamma(t) : \mathrm{e}^{i(\phi_\gamma(t)+\delta)} = 1, t \in [0,T_\gamma]\} \cap \\ & \{\alpha(t) \; : \; \mathrm{e}^{i(\phi_\alpha(t)+\delta)} = 1, t \in [0,T_\alpha]\} \\ \neq \; & \emptyset \end{aligned}$$

であれば，対象の状態は α 内と γ 内とで一致した同じ状態が存在可能であるから，その一致した状態を通して $\alpha^\star$ から $\gamma^\star$ へ連続的に遷移するときに位相の情報は失われないので，$\gamma^\star$ は $(\alpha)^\star$ の**復元可能な変形**であると言おう [1]。

2.2. 単一の測定の文脈における測定

$B : Q \to \mathbb{R}$ を物理量として，周期的軌道 β_i $(i = 1,2,\cdots)$ を，任意の時間 t に対して一定値

$$b_i = B(\beta_i(t)) \tag{4}$$

を取るものとする。β_i 達は物理量 B を測定する文脈において安定して形成される周期的軌道であるので，それらの集合を**測定の文脈**と呼んで $\underline{\beta}$ で表す。すなわち，$\underline{\beta} := \{\beta_1, \beta_2, \cdots\}$ である [1]。β_i は測定の文脈における力学系のアトラクターであるであろう [4]。量子現象の

背後には，環境に適合して皮膚の色を変えるカメレオンのようなアダプティブ・ダイナミクスが存在することが示唆されている [5]。

α の状態が $\beta_1, \beta_2, \cdots$ のどれかに遷移して，物理量 B の測定がなされるという状況を考えよう。対象 Σ は，最初に α 内の状態に準備されているとする。物理量 B を測定するために，測定の文脈を $\underline{\beta}$ に変化させたときを考えよう。測定器との相互作用によって，周期的軌道 $\beta_1, \beta_2, \ldots$ へと α は変形されることになる。最初に α での時刻 $s_\alpha^{\beta_k}$ における α 内の状態 $\alpha(s_\alpha^{\beta_k})$ にあった Σ は、時刻 $f_\alpha^{\beta_k}$ に β_k 内の状態 $\beta_k(f_\alpha^{\beta_k})$ へ到達するとしよう。因果関係を考えると $s_\alpha^{\beta_k} < f_\alpha^{\beta_k}$ でなければならないが，$s_\alpha^{\beta_k}$ は T_α の整数倍の不定性があり，同様に $f_\alpha^{\beta_k}$ は T_{β_k} の整数倍の不定性があるとの了解のもと，簡単のために $s_\alpha^{\beta_k} \in [0, T_\alpha]$，$f_\alpha^{\beta_k} \in [0, T_{\beta_k}]$ であるとして，以下の話を続ける。

この遷移は，α と β_k を繋ぐ曲線 $\xi : [0, f_\xi] \to Q$ に沿うものとしよう。Σ の状態は β_k 内の状態から再び α 内の状態へ戻ることによって周期的軌道 α の変形となることから，β_k 内の状態 $\beta_k(s_{\beta_k}^\alpha)$ と α 内の状態 $\alpha(f_{\beta_j}^\alpha)$ を結ぶ曲線 $\xi' : [0, f_{\xi'}] \to Q$ に沿って戻るとしよう。すると，

$$
\begin{aligned}
&\alpha[0, s_\alpha^{\beta_k}] \rhd \xi \rhd \beta_k[f_\alpha^{\beta_k}, s_{\beta_k}^{\alpha_i}] \\
&\rhd \xi' \rhd \alpha[f_{\beta_k}^\alpha, T_\alpha]
\end{aligned}
$$

は，周期的軌道になる。ここで，$\alpha[0, s_\alpha^{\beta_k}]$ は α の定義域を $[0, T_\alpha]$ から $[0, s_\alpha^{\beta_k}]$ に制限した Q 内の曲線を表す。他も同様である。これを手短に $\alpha \rhd \xi \rhd \beta_k \rhd \xi' \rhd \alpha$ と書こう。

この周期的軌道 $\alpha \rhd \xi \rhd \beta_k \rhd \xi' \rhd \alpha$ が α の復元可能な変形であるというのは，各々の $U(1)$-リフト $(\alpha \rhd \xi \rhd \beta_k \rhd \xi' \rhd \alpha)^\star$ と $(\alpha)^\star$ の位相因子が，$\alpha \cap (\alpha \rhd \xi \rhd \beta_k \rhd \xi' \rhd \alpha)$ 上で一致するということである。

α，ξ，β_k，ξ' に同伴する位相の関数を，各々 ϕ_α，ϕ_ξ，ϕ_{β_k}，$\phi_{\xi'}$ で表そう。つまり，

$$
\begin{aligned}
(\alpha)^\star(t) &= (\alpha(t), \mathrm{e}^{i\phi_\alpha(t)}), \\
(\xi)^\star(t) &= (\xi(t), \mathrm{e}^{i\phi_\xi(t)}), \\
(\beta_k)^\star(t) &= (\beta_k(t), \mathrm{e}^{i\phi_{\beta_k}(t)}), \\
(\xi')^\star(t) &= (\xi'(t), \mathrm{e}^{i\phi_{\xi'}(t)})
\end{aligned}
$$

とする。

$\alpha[0, s_\alpha^{\beta_k}]$ から ξ への接続に際して，

$$
\begin{aligned}
\phi_\xi(0) &= \phi_\alpha(s_\alpha^{\beta_k}) \\
\phi_{\beta_k}(f_\alpha^{\beta_k}) - \phi_\xi(f_\xi) &= \theta_\alpha^{\beta_k} + \delta\phi_\xi(f_\xi)
\end{aligned}
$$

であるとする。ここで ξ は確率的に定まるとすると，$\phi_\xi(f_\xi)$ と $\delta\phi_\xi(f_\xi)$ は確率変数となる。

$$
\mathbf{E}(\delta\phi_\xi(f_\xi)) = 0 \tag{5}
$$

を仮定する。すると，$\theta_\alpha^{\beta_k}$ は $\phi_{\beta_k}(f_\alpha^{\beta_k})$ と $\phi_\xi(f_\xi)$ のずれの平均値であり，

$$
\theta_\alpha^{\beta_k} = \phi_{\beta_k}(f_\alpha^{\beta_k}) - \mathbf{E}(\phi_\xi(f_\xi)) \tag{6}
$$

である。

同様にして，$\beta_k[f_\alpha^{\beta_k}, s_{\beta_k}^\alpha]$ から ξ' への接続に際して，

$$
\begin{aligned}
\phi_{\xi'}(0) &= \phi_{\beta_k}(s_{\beta_k}^\alpha) \\
\phi_\alpha(f_{\beta_k}^\alpha) - \phi_{\xi'}(f_{\xi'}) &= \theta_{\beta_k}^\alpha + \delta\phi_{\xi'}(f_{\xi'})
\end{aligned}
$$

であるとする。

$$
\mathbf{E}(\delta\phi_{\xi'}(f_{\xi'})) = 0 \tag{7}
$$

を仮定する。すると，$\theta_\alpha^{\beta_k}$ は

$$
\theta_{\beta_k}^\alpha = \phi_\alpha(f_{\beta_k}^\alpha) - \mathbf{E}(\phi_{\xi'}(f_{\xi'})) \tag{8}
$$

である。

$\alpha[0, s_\alpha^{\beta_k}] \rhd \xi \rhd \beta_k[f_\alpha^{\beta_k}, s_{\beta_k}^{f_{\beta_k}}] \rhd \xi'$ から $\alpha[f_{\beta_k}^\alpha, T_\alpha]$ への接続に際して，位相で

$$
\phi_{\beta_k}(f_\alpha^{\beta_k}) - \phi_\xi(f_\xi) + \phi_\alpha(f_{\beta_k}^\alpha) - \phi_{\xi'}(f_{\xi'}) \tag{9}
$$

だけのずれが生じる。これは

$$
\theta_\alpha^{\beta_k} + \delta\phi_\xi(f_\xi) + \theta_{\beta_k}^\alpha + \delta\phi_{\xi'}(f_{\xi'}) \tag{10}
$$

に等しい。$\delta\phi_\xi(f_\xi) + \delta\phi_{\xi'}(f_{\xi'}) = x$ となる確率を $w_2(x)$ とすると，$(\alpha \rhd \xi \rhd \beta_k \rhd \xi' \rhd \alpha)^\star$ が復元可能な $(\alpha)^\star$ の変形である確率は $w_2(-\theta_\alpha^{\beta_k} - \theta_{\beta_k}^\alpha)$ になる。

w_2 は，$[-\pi,\pi]$ 上の周期関数である。周期的軌道間の遷移に際して，その軌道を繋げる曲線 ξ,ξ' のばらつき具合を表す関数で，位相のずれの確率を表すものである。位相のずれの正負には特別な意味はないこと，位相のずれがない場合の確率が $w_2(0)$ であることから，以下を仮定することは自然なことである:

1. $\forall x$ に対して, $w_2(x)\geq 0$ (非負関数);
2. $\forall x$ に対して, $w_2(-x)=w_2(x)$ (偶関数);
3. $\forall x$ に対して, $w_2(0)\geq w_2(x)$ (0 で最大).

ξ,ξ' を完全に制御できてばらつかない場合は，$\delta\phi_\xi(f_\xi)$，$\delta\phi_{\xi'}(f_{\xi'})$ はすべて 0 になる。この場合，$w_2(x)=\delta_{0,x}$ となる。$-\theta_\alpha^{\beta_k}-\theta_{\beta_k}^\alpha = x=0$ が確率 1 で成り立つので,

$$\theta_{\beta_k}^\alpha=-\theta_\alpha^{\beta_k} \tag{11}$$

が成り立つ。

2.3. 別の測定の文脈を経由する測定

物理量 B を測定するために，測定の文脈を $\underline{\beta}$ に変化させる場合に，今度は，測定の文脈 $\underline{\rho}$ を経由して β_j に分岐し，再び測定の文脈 $\underline{\rho}$ を経由して α に戻るような変形を考えよう。α のこのような変形の一つは次のようなものである：

$$\begin{aligned}\alpha\multimap_k^l\beta_j \quad := \quad & \alpha[0,s_\alpha^{\rho_k}]\rhd\xi\rhd\rho_k[f_\alpha^{\rho_k},s_{\rho_k}^{\beta_j}]\rhd\xi' \\ & \rhd\beta_j[f_{\rho_k}^{\beta_j},s_{\beta_j}^{\rho_l}]\rhd\xi''\rhd\rho_l[f_{\beta_j}^{\rho_l},s_{\rho_l}^{\alpha}] \\ & \rhd\xi'''\rhd\alpha_i[f_{\rho_l}^\alpha,T_\alpha].\end{aligned}$$

$(\alpha\multimap_k^l\beta_j)^\star$ が $(\alpha)^\star$ の復元可能な変形になる確率は，$(-\pi/2,\pi/2)$ に台を持ち，$x=0$ で最大値をとる偶関数 $w_4(x)$ によって，$w_4(-\theta_\alpha^{\rho_k}-\theta_{\rho_k}^{\beta_j}-\theta_{\beta_j}^{\rho_l}-\theta_{\rho_k}^{\alpha})$ で与えられるとした [1]。

もうひとつの変形は，対生成消滅によって対象の入れ替わりがあるが，状態は周期的軌道に復帰するもので，$\alpha\multimap_{k'}^{l'}\beta_j\hookrightarrow_k^l\alpha$ という記号で表されたもので，$\underline{\beta}$ の測定結果を与えないものである [1]。

α から β_j に分岐する重み（確率に比例する量）を $l(\beta_j|\alpha)$ で表す。任意の測定の文脈 $\underline{\alpha}$, $\underline{\beta}$ について，$\alpha\in\underline{\alpha}$，$\beta_j\in\underline{\beta}$ に対して、

1. $l(\beta_j|\alpha)\geq 0$,
2. $\sum_j l(\beta_j|\alpha)^2=1$,
3. $l(\alpha|\beta_j)=l(\beta_j|\alpha)$

を満たすものであるとする [1]。これらは，他の測定の文脈について，すなわち $l(\rho_k|\alpha)$, $l(\rho_k|\beta_j)$ 等についても同様に成立するものとする。

ここで，$\alpha_i\in\underline{\alpha}$ に対して複素ベクトル $|\alpha_i\rangle$ を次のように定義しよう:

$$|\alpha_i\rangle:=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{i\theta_{\alpha_i}^{\rho_1}}l(\rho_1|\alpha_i)\\ \mathrm{e}^{i\theta_{\alpha_i}^{\rho_2}}l(\rho_2|\alpha_i)\\ \vdots\\ \mathrm{e}^{i\theta_{\alpha_i}^{\rho_n}}l(\rho_n|\alpha_i)\\ \vdots\end{pmatrix}. \tag{12}$$

ここで，複素ベクトル $|\beta_j\rangle$ も同様に定義すると，その双対ベクトルの $\langle\beta_j|$ は次のようになる。

$$\begin{aligned}\langle\beta_j|=\Big(&\mathrm{e}^{-i\theta_{\beta_j}^{\rho_1}}l(\beta_j|\rho_1),\mathrm{e}^{-i\theta_{\beta_j}^{\rho_2}}l(\beta_j|\rho_2),\\ &\cdots,\mathrm{e}^{-i\theta_{\beta_j}^{\rho_n}}l(\beta_j|\rho_n),\cdots\Big).\end{aligned} \tag{13}$$

$k=1,2,\cdots$ に関して,

$$\left|\alpha_i^{(k:\beta_j)}\right\rangle:=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{i(k-1)(\theta_{\alpha_i}^{\rho_1}-\theta_{\beta_j}^{\rho_1})}\mathrm{e}^{i\theta_{\alpha_i}^{\rho_1}}l(\rho_1|\alpha_i)\\ \mathrm{e}^{i(k-1)(\theta_{\alpha_i}^{\rho_2}-\theta_{\beta_j}^{\rho_2})}\mathrm{e}^{i\theta_{\alpha_i}^{\rho_2}}l(\rho_2|\alpha_i)\\ \vdots\\ \mathrm{e}^{i(k-1)(\theta_{\alpha_i}^{\rho_n}-\theta_{\beta_j}^{\rho_n})}\mathrm{e}^{i\theta_{\alpha_i}^{\rho_n}}l(\rho_n|\alpha_i)\\ \vdots\end{pmatrix} \tag{14}$$

と定義する。$k=0$ については,

$$\left|\alpha_i^{(0:\beta_j)}\right\rangle:=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-i(\theta_{\alpha_i}^{\rho_1}-\theta_{\beta_j}^{\rho_1})}\mathrm{e}^{i\theta_{\alpha_i}^{\rho_1}}l(\rho_1|\alpha_i)\\ \mathrm{e}^{-i(\theta_{\alpha_i}^{\rho_2}-\theta_{\beta_j}^{\rho_2})}\mathrm{e}^{i\theta_{\alpha_i}^{\rho_2}}l(\rho_2|\alpha_i)\\ \vdots\\ \mathrm{e}^{-i(\theta_{\alpha_i}^{\rho_n}-\theta_{\beta_j}^{\rho_n})}\mathrm{e}^{i\theta_{\alpha_i}^{\rho_n}}l(\rho_n|\alpha_i)\end{pmatrix}. \tag{15}$$

と定義する。

$$v_4(x) := \begin{cases} -w_4(x+\pi), & x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}], \\ w_4(x), & x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \\ -w_4(x-\pi), & x \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases} \tag{16}$$

と定義すると，v_4 は周期 2π の周期関数で，Fourier 級数に展開できる。実偶関数なので，実数 c_k を展開係数として

$$v_4(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cos(kx) \tag{17}$$

となる。$v_4(\pm\pi/2) = 0$ より，$c_0 = 0$ である。

α_i に準備した対象について，$\underline{\rho}$ を経由した復元可能は変形で $B = b_j$ を得る確率は

$$c_1 \left|\langle\beta_j|\alpha_i\rangle\right|^2 + \sum_{k=2}^{\infty} c_k \left|\langle\beta_j|\alpha_i^{(k:\beta_j)}\rangle\right|^2 \tag{18}$$

に比例する [1]。

c_k は $w_4(x)$，すなわち ξ, ξ', ξ'', ξ''' のばらつき方に依存して定まるものであった。理想的な測定実験とは何かといえば，c_1 を除いてすべて $c_k = 0$ ということである。すなわち $w_4(x) = \cos x$ の場合である。というのは，

$$\hat{\Phi} := \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left|\alpha_i^{(k:\beta_j)}\right\rangle\left\langle\alpha_i^{(k:\beta_j)}\right| \tag{19}$$

と定義すると，$B = b_j$ を得る確率は

$$\mathrm{Tr}\left(\hat{\Phi}|\beta_j\rangle\langle\beta_j|\right) \tag{20}$$

と表すことができるからで，c_1 を除いて $c_k = 0$ であることは，量子力学的な純粋状態の確率を与えるからである [1]。

$w_2(x) = \delta_{0,x}$ としたので，$\alpha_i \triangleright \xi \triangleright \beta_j \triangleright \xi' \triangleright \alpha_i$ の $U(1)$-リフトは，$(\alpha_i)^\star$ の復元可能な変形である。この復元可能な変形により $B = b_j$ となる確率は

$$w_2(0) l(\beta_j|\alpha_i) l(\alpha_i|\beta_j) = l(\beta_j|\alpha_i)^2 \tag{21}$$

に比例する。$l(\beta_j|\alpha_i)$ に課した条件から，

$$\sum_j l(\beta_j|\alpha_i)^2 = 1$$

というように正規化されていることに注意しよう。

理想的な実験で生じる $(\alpha_i)^\star$ の復元可能な変形 $(\alpha_i \multimap^{l'}_{k'} \beta_j)^\star$ により得られる $B = b_j$ となる確率 $\left|\langle\beta_j|\alpha_i\rangle\right|^2$ と $\alpha_i \triangleright \xi \triangleright \beta_j \triangleright \xi' \triangleright \alpha_i$ という変形で得られる確率 $l(\beta_j|\alpha_i)^2$ は，ともに復元可能な変形によるものであるから，一致するはずである。これは次の等式が成り立つことを意味する：

$$l(\beta_j|\alpha_i)^2 = \left|\sum_k \mathrm{e}^{-i\theta^{\rho_k}_{\beta_j}} l(\beta_j|\rho_k) \mathrm{e}^{i\theta^{\rho_k}_{\alpha_i}} l(\rho_k|\alpha_i)\right|^2 . \tag{22}$$

これが成り立つための十分条件は

$$\mathrm{e}^{i\theta^{\beta_j}_{\alpha_i}} l(\beta_j|\alpha_i) = \sum_k \mathrm{e}^{-i\theta^{\rho_k}_{\beta_j}} l(\beta_j|\rho_k) \mathrm{e}^{i\theta^{\rho_k}_{\alpha_i}} l(\rho_k|\alpha_i) \tag{23}$$

である。復元可能な変形で統計的な結果が変わってしまうような実験であれば (22) が成立しないので，(23) も成立しない。

復元可能な変形で結果が変わってしまう実験や理想的ではない実験では，(23) は成り立たないことが示されたのだから，量子力学的現象の実験というものは理想的で復元可能な変形があったかは識別しない実験であると言うことができる [1]。

量子現象の記述において，$l(\beta_j|\alpha_i)$，$\theta^{\beta_j}_{\alpha_i}$ 達に対して課される条件は，(23) を満たすことだけではない。次節では，量子力学の最も重要な発見である位置と運動量の正準交換関係を成立させるための条件を探ることにしよう。

3．オブザーバブルの交換関係

前節で扱った $l(\beta_j|\alpha_i)$ や $\theta^{\beta_j}_{\alpha_i}$ は，量子力学の正準交換関係を導出できるだけ十分に特徴づけられていない。本節では，その条件を探究することにする。

3.1．物理量の作用

量子力学では，観測可能量は状態ベクトルに作用する演算子として表現される。物

理量に状態を変化させる作用を対応させることを考えたとき，その物理量をハミルトニアンとする時間発展を対応させることがまず第一に思いつく。その無限小変換は相空間 Q 上のベクトル場で，次のように定義される [6, 7, 8]。Q のシンプレクティック形式 ω を，Q の正準座標系 $(q^1, q^2, \cdots, q^{\mathrm{dim}Q/2}, p_1, p_2, \cdots, p_{\mathrm{dim}Q/2})$ を使って

$$\omega = \sum_{k=1}^{\mathrm{dim}Q/2} dp_k \wedge dq^k \tag{24}$$

とする。

物理量 $F : Q \to \mathbb{R}$ に同伴したハミルトニアン・ベクトル場 X_F は，任意のベクトル場 $Y \in T(Q)$ について

$$\omega(X_F, Y) = -Y \cdot F \tag{25}$$

により定義される。

物理量 $H : Q \to \mathbb{R}$ に同伴するハミルトニアン・ベクトル場 X_H から生成される Q 上の 1 パラメーター写像（1 パラメーター変換群）を，s をパラメーターとして，$\mathrm{Exp}sX_H$ と書く。この写像を $\eta \in Q$ に作用させて得られる Q の軌道 $\rho(s)$ を考えよう。つまり，

$$\rho(s) := \mathrm{Exp}sX_H(\eta). \tag{26}$$

$\rho(s)$ は正準方程式を満たす:

$$\begin{aligned}\frac{dq^k(\rho(s))}{ds} &= \frac{d}{ds}q^k(\mathrm{Exp}sX_H(\eta)) \\ &= X_H \cdot q^k(\rho(s)) \\ &= \frac{\partial H}{\partial p_k}(\rho(s));\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dp_k(\rho(s))}{ds} &= \frac{d}{ds}p_k(\mathrm{Exp}sX_H(\eta)) \\ &= X_H \cdot p_k(\rho(s)) \\ &= -\frac{\partial H}{\partial q^k}(\rho(s)).\end{aligned}$$

物理量 $F, G : Q \to \mathbb{R}$ に対して，Poisson 括弧を以下で定義する。

$$\{F, G\} := X_F \cdot G. \tag{27}$$

任意のなめらかな $f : Q \to \mathbb{R}$ に対して

$$[X_F, X_G] \cdot f := X_F \cdot (X_G \cdot f) - X_G \cdot (X_F \cdot f) \tag{28}$$

と定義すると，次が成り立つ:

$$[X_F, X_G] = X_{\{F,G\}}. \tag{29}$$

$[X_{p_i}, X_{q^j}] = X_{\{p_i, q^j\}} = X_1 = 0$ となるので，X_F をオブザーバブル，つまり物理量 F が量子化された演算子とみなすことはできない。

3.2. 軌道の汎関数

オブザーバブルが量子力学的状態の無限小変換であるということから，Q の点である状態を変化させるハミルトニアン・ベクトル場 X_F よりも，量子力学的状態に対応する周期的軌道 α の無限小変換を与えるものが候補になる。故に，前節の $l(\beta_j|\alpha)$ と $\theta_\alpha^{\beta_j}$ を周期的軌道の $U(1)$-リフト $\alpha^\star$ の汎関数とみて，X_F から誘導される α の変換を考えることにしよう。

ρ を Q 内の周期的軌道として，それに実数を対応させる汎関数 $l : \rho \mapsto l[\rho] \in \mathbb{R}$ が，任意の測定の文脈 $\underline{\alpha}$ について，$\alpha \in \underline{\alpha}$ に対して

$$l[\alpha] = l(\beta_j|\alpha) \tag{30}$$

を満たすとする。同様に，汎関数 $\theta : \rho^\star \mapsto \theta[\rho^\star] \in \mathbb{R}$ は

$$\theta[\alpha^\star] = \theta_\alpha^{\beta_j} \tag{31}$$

を満たすとする。

Q 内の周期的軌道の $U(1)$-リフト $\rho^\star$ の汎関数

$$\varphi[\rho^\star] := l[\rho]\mathrm{e}^{i\theta[\rho^\star]} \tag{32}$$

は，任意の測定の文脈 $\underline{\alpha}$ について，$\alpha_i \in \underline{\alpha}$ に対して

$$\varphi[(\alpha_i)^\star] := l(\beta_j|\alpha_i)\mathrm{e}^{i\theta_{\alpha_i}^{\beta_j}} \tag{33}$$

を満たすことになる。

(30) が成り立つように，$l[\cdot]$ に対して以下のように要請しよう。まず，非負である，すなわち $l[\cdot] \geq 0$ であるとする。また，軌道のパラメーターの取り方には依存しない，すなわ

ち，$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を狭義単調増加関数として，$\alpha'(u):=\alpha(f(u))$ と定義された周期的軌道 α' に対して，

$$l[\alpha']=l[\alpha]$$

である。

$s>0$ を実数として，物理量 F に同伴するハミルトニアン・ベクトル場 X_F から誘導される変換による周期的軌道 α の変換結果 $\mathrm{Exp}sX_F(\alpha)$ を次のように定義できる：$u\in[0,T_\alpha]$ に対して，

$$\mathrm{Exp}sX_F(\alpha)(u):=\mathrm{Exp}sX_F(\alpha(u)). \tag{34}$$

従って，周期的軌道 $\mathrm{Exp}sX_F(\alpha)$ の周期 $T_{\mathrm{Exp}sX_F(\alpha)}$ は

$$T_{\mathrm{Exp}sX_F(\alpha)}=T_\alpha \tag{35}$$

である。

α の $U(1)$-リフト $\alpha^\star$ に対しても，各 $u\in[0,T_\alpha]$ に対して，

$$\begin{aligned}&\mathrm{Exp}sX_F(\alpha^\star)(u)\\&:=\left(\mathrm{Exp}sX_F(\alpha)(u),\mathrm{e}^{i\phi_{\mathrm{Exp}sX_F(\alpha)}(u)}\right)\end{aligned} \tag{36}$$

と定義される。ここで，任意の Q 内の周期的軌道 ρ に対して，その $U(1)$-リフト $\rho^\star$ が存在して，その位相が ϕ_ρ で与えられると仮定している。$\phi_{\mathrm{Exp}sX_F(\alpha)}(u)$ はそのような意味で定まるものであって，$\alpha(u)$ と $\phi_\alpha(u)$ という値だけに依存して u について局所的に定まるとは限らない。

$\theta[\cdot]$ については，次が成り立つことを要請しよう。

$$\theta[\mathrm{Exp}sX_F(\alpha^\star)]=\theta[\alpha^\star]+\lambda s\overline{F}[\alpha]. \tag{37}$$

ここで λ は実定数で，$\overline{F}[\alpha]$ は α に沿っての F の平均である。すなわち

$$\overline{F}[\alpha]:=\frac{1}{T_\alpha}\int_0^{T_\alpha}du\ F(\alpha(u)). \tag{38}$$

(37) の要請は，$\theta^{\beta_j}_{\mathrm{Exp}sX_F(\alpha)}$ についての要請であることを思い出そう。$\phi_\beta(t)$ が狭義単調増加関数であったことから逆関数を持つことと，(6) から

$$\begin{aligned}&f^{\beta_j}_{\mathrm{Exp}sX_F(\alpha)}\\&=(\phi_{\beta_j})^{-1}(\theta^{\beta_j}_\alpha+\lambda s\overline{F}[\alpha]-\mathbf{E}(\phi_\xi(f_\xi)))\end{aligned}$$

を得る。従って，(37) の要請は，$\mathrm{Exp}sX_F(\alpha)$ から β_j に到着するときの時刻に対するものである。

(37) の要請の理由は，以下の観察にある。周期的軌道 α が，物理量 A によって

$$\alpha(u)=\mathrm{Exp}uX_A(\alpha(0)) \tag{39}$$

で与えられたとすると，

$$\begin{aligned}\mathrm{Exp}sX_A(\alpha)(u)=&\mathrm{Exp}(s+u)X_A(\alpha(0))\\=&\alpha(u+s)\end{aligned}$$

となって，パラメーターをずらしただけの軌道にとどまるので，量子力学を思い出すと，この変換に対する位相の変化は A の測定値に s をかけたものに比例すると考えられるからである。そして，A は α 上で一定の値 $a=A(\alpha(u))$ を持つので，

$$\overline{A}[\alpha]=\frac{1}{T_\alpha}\int_0^{T_\alpha}du\ A(\alpha(u))=a \tag{40}$$

となり，測定値 a と一致する。

3.3. 軌道の汎関数の線形写像による正準交換関係

これらの要請ものとで，$\mathrm{Exp}sX_F$ による φ の変化を計算してみよう。

$$\begin{aligned}&\frac{d}{ds}\varphi[\mathrm{Exp}sX_F(\alpha^\star)]\\&=\frac{dl[\mathrm{Exp}sX_F(\alpha)]}{ds}\ \mathrm{e}^{i\theta[\mathrm{Exp}sX_F(\alpha^\star)]}\\&\quad+i\frac{d\theta[\mathrm{Exp}sX_F(\alpha^\star)]}{ds}\ \varphi[\mathrm{Exp}sX_F(\alpha^\star)]\\&=\int_0^{T_\alpha}du\ \sum_{\mu=1}^{\dim Q}\frac{\delta l[\rho]}{\delta\rho^\mu(u)}X_F\cdot\eta^\mu(\mathrm{Exp}sX_F(\alpha))\\&\quad\times\mathrm{e}^{i\theta[\mathrm{Exp}sX_F(\alpha^\star)]}\\&\quad+i\lambda\overline{F}[\alpha]\ \varphi[\mathrm{Exp}sX_F(\alpha^\star)],\end{aligned}$$

ここで，(η^μ) は Q の局所座標系を表し，具体的には，$(\eta^1,\cdots,\eta^{\mathrm{dim}Q}) := (q^1,\cdots,q^{\mathrm{dim}Q/2}, p_1,\cdots,p_{\mathrm{dim}Q/2})$ である。また $\rho^\mu(u) := \eta^\mu(\rho(u))$ とし，変分の値は $\rho = \mathrm{Exp}sX_F(\alpha)$ で評価するものとする。

次に，上式の α を $\mathrm{Exp}tX_G(\alpha)$ で置き換えて，t について微分する。$\alpha(s,t) := \mathrm{Exp}sX_F \circ \mathrm{Exp}tX_G(\alpha)$ という記号を導入する。

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\frac{d}{ds}\varphi[\mathrm{Exp}sX_F \circ \mathrm{Exp}tX_G(\alpha^\star)] \\
=&\int_0^{T_\alpha} du dv \sum_{\mu,\nu=1}^{\mathrm{dim}Q} \frac{\delta^2 l[\rho]}{\delta\rho^\mu(u)\delta\rho^\nu(v)} \\
&\times X_F \cdot \eta^\mu(\alpha(s,t)(u))\ X_G \cdot \eta^\nu(\alpha(s,t)(v)) \\
&\times \mathrm{e}^{i\theta[\alpha(s,t)^\star]} \\
&+ \int_0^{T_\alpha} du \sum_{\mu=1}^{\mathrm{dim}Q} \frac{\delta l[\rho]}{\delta\rho^\mu(u)} \\
&\times X_G \cdot X_F \cdot \eta^\mu(\alpha(s,t)(u))\ \mathrm{e}^{i\theta[\alpha(s,t)^\star]} \\
&+ \int_0^{T_\alpha} du \sum_{\mu=1}^{\mathrm{dim}Q} \frac{\delta l[\rho]}{\delta\rho^\mu(u)} X_F \cdot \eta^\mu(\alpha(s,t)(u)) \\
&\times i\lambda\overline{G}[\alpha]\ \mathrm{e}^{i\theta[\alpha(s,t)^\star]} \\
&+ \int_0^{T_\alpha} du \sum_{\mu=1}^{\mathrm{dim}Q} \frac{\delta l[\rho]}{\delta\rho^\mu(u)} X_F \cdot \eta^\mu(\alpha(s,t)(u)) \\
&\times i\lambda s \frac{d\overline{F}[\mathrm{Exp}tX_G(\alpha)]}{dt}\ \mathrm{e}^{i\theta[\alpha(s,t)^\star]} \\
&+ i\lambda \frac{d\overline{F}[\mathrm{Exp}tX_G(\alpha)]}{dt}\ \varphi[\alpha(s,t)^\star] \\
&+ i\lambda\overline{F}[\mathrm{Exp}tX_G(\alpha)] \\
&\times \int_0^{T_\alpha} dv \sum_{\nu=1}^{\mathrm{dim}Q} \frac{\delta l[\rho]}{\delta\rho^\nu(v)} X_G \cdot \eta^\nu(\alpha(s,t)(v)) \\
&\times \mathrm{e}^{i\theta[\alpha(s,t)^\star]} \\
&+ i\lambda\overline{F}[\mathrm{Exp}tX_G(\alpha)]\ i\lambda\overline{G}[\alpha]\ \varphi[\alpha(s,t)^\star] \\
&+ i\lambda\overline{F}[\mathrm{Exp}tX_G(\alpha)] \\
&\times i\lambda s \frac{d\overline{F}[\mathrm{Exp}tX_G(\alpha)]}{dt}\ \varphi[\alpha(s,t)^\star].
\end{aligned}
$$

$s = t = 0$ では，

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\frac{d}{ds}\varphi[\mathrm{Exp}sX_F \circ \mathrm{Exp}tX_G(\alpha^\star)]|_{s=t=0} \\
=&\int_0^{T_\alpha} du dv \sum_{\mu,\nu=1}^{\mathrm{dim}Q} \frac{\delta^2 l[\rho]}{\delta\rho^\mu(u)\delta\rho^\nu(v)} \\
&\times X_F \cdot \eta^\mu(\alpha(u))\ X_G \cdot \eta^\nu(\alpha(v)) \\
&\times \mathrm{e}^{i\theta[\alpha^\star]} \\
&+ \int_0^{T_\alpha} du \sum_{\mu=1}^{\mathrm{dim}Q} \frac{\delta l[\rho]}{\delta\rho^\mu(u)} X_G \cdot X_F \cdot \eta^\mu(\alpha(u)) \\
&\times \mathrm{e}^{i\theta[\alpha^\star]} \\
&+ \int_0^{T_\alpha} du \sum_{\mu=1}^{\mathrm{dim}Q} \frac{\delta l[\rho]}{\delta\rho^\mu(u)} X_F \cdot \eta^\mu(\alpha(u)) \\
&\times i\lambda\overline{G}[\alpha]\ \mathrm{e}^{i\theta[\alpha^\star]} \\
&+ i\lambda\overline{\{G,F\}}[\alpha]\ \varphi[\alpha^\star] \\
&+ i\lambda\overline{F}[\alpha] \\
&\times \int_0^{T_\alpha} dv \sum_{\nu=1}^{\mathrm{dim}Q} \frac{\delta l[\rho]}{\delta\rho^\nu(v)} X_G \cdot \eta^\nu(\alpha(v))\mathrm{e}^{i\theta[\alpha^\star]} \\
&+ i\lambda\overline{F}[\alpha]\ i\lambda\overline{G}[\alpha]\ \varphi[\alpha^\star].
\end{aligned}
$$

F と G を交換したものとの差は以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\frac{d}{ds}\varphi[\mathrm{Exp}sX_F \circ \mathrm{Exp}tX_G(\alpha^\star)]|_{s=t=0} \\
&- \frac{d}{ds}\frac{d}{dt}\varphi[\mathrm{Exp}tX_G \circ \mathrm{Exp}sX_F(\alpha^\star)]|_{s=t=0} \\
=&\int_0^{T_\alpha} du \sum_{\mu=1}^{\mathrm{dim}Q} \frac{\delta l[\rho]}{\delta\rho^\mu(u)} \\
&\times (X_G \cdot X_F - X_F \cdot X_G) \cdot \eta^\mu(\alpha(u)) \\
&\times \mathrm{e}^{i\theta[\alpha^\star]} \\
&+ i\lambda\overline{\{G,F\}}[\alpha]\ \varphi[\alpha^\star] \\
&- i\lambda\overline{\{F,G\}}[\alpha]\ \varphi[\alpha^\star] \\
=&\int_0^{T_\alpha} du \sum_{\mu=1}^{\mathrm{dim}Q} \frac{\delta l[\rho]}{\delta\rho^\mu(u)} X_{\{G,F\}} \cdot \eta^\mu(\alpha(u))\mathrm{e}^{i\theta[\alpha^\star]} \\
&+ 2i\lambda\overline{\{G,F\}}[\alpha]\ \varphi[\alpha^\star] \\
=&\frac{d}{ds}\varphi[\mathrm{Exp}sX_{\{G,F\}}(\alpha^\star)]|_{s=0} \\
&+ i\lambda\overline{\{G,F\}}[\alpha]\ \varphi[\alpha^\star].
\end{aligned}
$$

$$\check{F}(\varphi)[\alpha^\star] := \frac{1}{i\lambda}\frac{d\varphi[\mathrm{Exp}sX_F(\alpha^\star)]}{ds}|_{s=0} \quad (41)$$

と定義すると，$\check{F}$ は線形写像である。

すると，以下を得る。

$$\begin{aligned}[\check{F},\check{G}](\varphi)[\alpha^\star] &= \frac{-i}{\lambda}\check{\{F,G\}}(\varphi)[\alpha^\star] \\ &\quad + \frac{-i}{\lambda}\overline{\{F,G\}}[\alpha]\ \varphi[\alpha^\star].\end{aligned}$$

Poisson 括弧を積とする Lie 代数は保存されないが，正準交換関係は成り立たないわけではない。実際，

$$[\check{p_i},\check{q^j}](\varphi)[\alpha^\star] = -\frac{2i}{\lambda}\delta_{i,j}\varphi[\alpha^\star] \quad (42)$$

となるので，$\lambda = 2/\hbar$ とおけば良いからである。

4．Lie 代数を保存する対応

前節の結果は，位置と運動量の正準交換関係が導かれたといっても，Poisson 括弧を積とする Lie 代数を保存しないので，各運動量の量子化には役立たない。本節では，Lie 代数を保存するように軌道の汎関数の線形写像を定義することを考えよう。

$\mathrm{Exp}sX_F : Q \to Q$ から誘導される周期的軌道 α の写像を次のように定義してみる。

$$\begin{aligned}&\widetilde{\mathrm{Exp}sX_F}(\alpha) \\ :=\ &\underbrace{\alpha \triangleright \cdots \triangleright \alpha}_{m} \triangleright \varepsilon^{sX_F} \triangleright \\ &\underbrace{\mathrm{Exp}sX_F(\alpha) \triangleright \cdots \triangleright \mathrm{Exp}sX_F(\alpha)}_{n} \triangleright \varepsilon^{-sX_F},\end{aligned} \quad (43)$$

ここで，$u \in [0,s]$ に対して

$$\varepsilon^{sX_F}(u) := \mathrm{Exp}uX_F(\alpha(T_\alpha)) \quad (44)$$

であり，$u \in [0,s]$ に対して

$$\varepsilon^{-sX_F}(u) := \mathrm{Exp}(-u)X_F(\mathrm{Exp}sX_F(\alpha(T_\alpha))) \quad (45)$$

である。周期は，(35) を使って，

$$T_{\widetilde{\mathrm{Exp}sX_F}(\alpha)} = (m+n)T_\alpha + 2s \quad (46)$$

となる。

$\widetilde{\mathrm{Exp}sX_F}(\alpha)$ は，m 周期は α のままで，n 周期は $\mathrm{Exp}sX_F(\alpha)$ に遷移するような軌道である。これは，$\mathrm{Exp}sX_F(\alpha)$ に変換される前の状態である α の情報が残っているような変換である。まるで，ローレンツ・アトラクターのように，行ったり来たりする軌道である。

(30) であることから，$l[\cdot]$ は m 周期の α の状態から β_j への遷移はないはずなので，

$$l[\widetilde{\mathrm{Exp}sX_F}(\alpha)] = l[\mathrm{Exp}sX_F(\alpha)] \quad (47)$$

であるべきである。更に，$l[\cdot]$ は

$$\begin{aligned}&l[\widetilde{\mathrm{Exp}sX_F} \circ \widetilde{\mathrm{Exp}tX_G}(\alpha)] \\ =\ &l[\mathrm{Exp}sX_F \circ \mathrm{Exp}tX_G(\alpha)]\end{aligned} \quad (48)$$

を満たすと要請しよう。

(31) であることから，$l[\cdot]$ は m 周期の α の状態から β_j への遷移はないはずなので，

$$\theta[\widetilde{\mathrm{Exp}sX_F}(\alpha^\star)] = \theta[\mathrm{Exp}sX_F(\alpha^\star)] \quad (49)$$

であるべきである。しかし，今度は，一般に $\theta[\cdot]$ は

$$\begin{aligned}&\theta[\widetilde{\mathrm{Exp}sX_F} \circ \widetilde{\mathrm{Exp}tX_G}(\alpha^\star)] \\ \neq\ &\theta[\mathrm{Exp}sX_F \circ \mathrm{Exp}tX_G(\alpha^\star)]\end{aligned} \quad (50)$$

であっても良いことにしよう。なぜなら，我々が要請した (37) より，

$$\begin{aligned}&\theta[\widetilde{\mathrm{Exp}sX_F} \circ \widetilde{\mathrm{Exp}tX_G}(\alpha^\star)] \\ =&\theta[\mathrm{Exp}sX_F \circ \widetilde{\mathrm{Exp}tX_G}(\alpha^\star)] \\ =&\theta[\widetilde{\mathrm{Exp}tX_G}(\alpha^\star)] + \lambda s\overline{F}[\widetilde{\mathrm{Exp}tX_G}(\alpha)] \\ =&\theta[\mathrm{Exp}tX_G(\alpha^\star)] + \lambda s\overline{F}[\widetilde{\mathrm{Exp}tX_G}(\alpha)] \\ =&\theta[\alpha^\star] + \lambda t\overline{G}[\alpha] + \lambda s\overline{F}[\widetilde{\mathrm{Exp}tX_G}(\alpha)]\end{aligned}$$

となるからである。ここで，一般に

$$\overline{F}[\widetilde{\mathrm{Exp}tX_G}(\alpha)] \neq \overline{F}[\mathrm{Exp}tX_G(\alpha)]$$

となることに注意しよう。実際，

$$
\begin{aligned}
&\overline{F}[\widetilde{\mathrm{Exp}tX_G}(\alpha)]\\
=&\frac{1}{T_{\widetilde{\mathrm{Exp}tX_G}(\alpha)}}\int du\ F(\widetilde{\mathrm{Exp}tX_G}(\alpha)(u))\\
=&\frac{m}{T_{\widetilde{\mathrm{Exp}tX_G}(\alpha)}}\int_0^{T_\alpha} du\ F(\alpha(u))\\
&+\frac{n}{T_{\widetilde{\mathrm{Exp}tX_G}(\alpha)}}\int_0^{T_\alpha} du\ F(\mathrm{Exp}tX_G(\alpha)(u))\\
&+\frac{1}{T_{\widetilde{\mathrm{Exp}tX_G}(\alpha)}}\left[\int_0^t du\ F(\mathrm{Exp}uX_G(\alpha(T_\alpha)))\right.\\
&\left.+\int_0^t du\ F(\mathrm{Exp}(-u+t)X_G(\alpha(T_\alpha)))\right]\\
=&\frac{mT_\alpha}{(m+n)T_\alpha+2t}\overline{F}[\alpha]\\
&+\frac{nT_\alpha}{(m+n)T_\alpha+2t}\overline{F}[\mathrm{Exp}tX_G(\alpha)]\\
&+\frac{1}{T_{\widetilde{\mathrm{Exp}tX_G}(\alpha)}}\left[\int_0^t du\ F(\mathrm{Exp}uX_G(\alpha(T_\alpha)))\right.\\
&\left.+\int_0^t du\ F(\mathrm{Exp}(-u+t)X_G(\alpha(T_\alpha)))\right]
\end{aligned}
\tag{51}
$$

となる。

$$
\widetilde{F}(\varphi)[\alpha^\star] := \frac{1}{i\lambda}\frac{d\varphi[\widetilde{\mathrm{Exp}sX_F}(\alpha^\star)]}{ds}\Big|_{s=0} \tag{52}
$$

と定義する。この写像は線形である。

$$
\varphi[\widetilde{\mathrm{Exp}sX_F}(\alpha^\star)] = \varphi[\mathrm{Exp}sX_F(\alpha^\star)]
$$

なので，$\widetilde{F}(\varphi)[\alpha^\star] = \check{F}(\varphi)[\alpha^\star]$ である。しかし，一般に

$$
\begin{aligned}
&\varphi[\widetilde{\mathrm{Exp}sX_F}\circ\widetilde{\mathrm{Exp}tX_G}(\alpha^\star)]\\
\neq\quad &\varphi[\mathrm{Exp}sX_F\circ\mathrm{Exp}tX_G(\alpha^\star)]
\end{aligned}
$$

となって，

$$
\widetilde{F}(\varphi)[\widetilde{\mathrm{Exp}tX_G}(\alpha^\star)] \neq \check{F}(\varphi)[\mathrm{Exp}tX_G(\alpha^\star)]
$$

である。

$\widetilde{\alpha}(s,t) := \widetilde{\mathrm{Exp}sX_F}\circ\widetilde{\mathrm{Exp}tX_G}(\alpha)$ という記号を導入する。

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\frac{d}{ds}\varphi[\widetilde{\mathrm{Exp}sX_F}\circ\widetilde{\mathrm{Exp}tX_G}(\alpha^\star)]\\
=&\int_0^{T_\alpha} dudv \sum_{\mu,\nu=1}^{\dim Q}\frac{\delta^2 l[\rho]}{\delta\rho^\mu(u)\delta\rho^\nu(v)}\\
&\times X_F\cdot\eta^\mu(\alpha(s,t)(u))\ X_G\cdot\eta^\nu(\alpha(s,t)(v))\\
&\times \mathrm{e}^{i\theta[\widetilde{\alpha}(s,t)^\star]}\\
&+\int_0^{T_\alpha} du \sum_{\mu=1}^{\dim Q}\frac{\delta l[\rho]}{\delta\rho^\mu(u)}\\
&\times X_G\cdot X_F\cdot\eta^\mu(\alpha(s,t)(u))\ \mathrm{e}^{i\theta[\widetilde{\alpha}(s,t)^\star]}\\
&+\int_0^{T_\alpha} du \sum_{\mu=1}^{\dim Q}\frac{\delta l[\rho]}{\delta\rho^\mu(u)}X_F\cdot\eta^\mu(\alpha(s,t)(u))\\
&\times i\lambda\overline{G}[\alpha]\ \mathrm{e}^{i\theta[\widetilde{\alpha}(s,t)^\star]}\\
&+\int_0^{T_\alpha} du \sum_{\mu=1}^{\dim Q}\frac{\delta l[\rho]}{\delta\rho^\mu(u)}X_F\cdot\eta^\mu(\alpha(s,t)(u))\\
&\times i\lambda s\frac{d\overline{F}[\widetilde{\mathrm{Exp}tX_G}(\alpha)]}{dt}\ \mathrm{e}^{i\theta[\widetilde{\alpha}(s,t)^\star]}\\
&+i\lambda\frac{d\overline{F}[\widetilde{\mathrm{Exp}tX_G}(\alpha)]}{dt}\ \varphi[\widetilde{\alpha}(s,t)^\star]\\
&+i\lambda\overline{F}[\widetilde{\mathrm{Exp}tX_G}(\alpha)]\\
&\times\int_0^{T_\alpha} dv \sum_{\nu=1}^{\dim Q}\frac{\delta l[\rho]}{\delta\rho^\nu(v)}X_G\cdot\eta^\nu(\alpha(s,t)(v))\\
&\times \mathrm{e}^{i\theta[\widetilde{\alpha}(s,t)^\star]}\\
&+i\lambda\overline{F}[\widetilde{\mathrm{Exp}tX_G}(\alpha)]\ i\lambda\overline{G}[\alpha]\ \varphi[\widetilde{\alpha}(s,t)^\star]\\
&+i\lambda\overline{F}[\widetilde{\mathrm{Exp}tX_G}(\alpha)]\\
&\times i\lambda s\frac{d\overline{F}[\widetilde{\mathrm{Exp}tX_G}(\alpha)]}{dt}\ \varphi[\widetilde{\alpha}(s,t)^\star].
\end{aligned}
$$

$s=t=0$ では,

$$\frac{d}{dt}\frac{d}{ds}\varphi[\widetilde{\mathrm{Exp}sX_F}\circ\widetilde{\mathrm{Exp}tX_G}(\alpha^\star)]|_{s=t=0}$$

$$=\int_0^{T_\alpha}dudv\sum_{\mu,\nu=1}^{\dim Q}\frac{\delta^2 l[\rho]}{\delta\rho^\mu(u)\delta\rho^\nu(v)}$$

$$\times X_F\cdot\eta^\mu(\alpha(u))\ X_G\cdot\eta^\nu(\alpha(v))$$

$$\times \mathrm{e}^{i\theta[\alpha^\star]}$$

$$+\int_0^{T_\alpha}du\sum_{\mu=1}^{\dim Q}\frac{\delta l[\rho]}{\delta\rho^\mu(u)}X_G\cdot X_F\cdot\eta^\mu(\alpha(u))$$

$$\times \mathrm{e}^{i\theta[\alpha^\star]}$$

$$+\int_0^{T_\alpha}du\sum_{\mu=1}^{\dim Q}\frac{\delta l[\rho]}{\delta\rho^\mu(u)}X_F\cdot\eta^\mu(\alpha(u))$$

$$\times i\lambda\overline{G}[\alpha]\ \mathrm{e}^{i\theta[\alpha^\star]}$$

$$+i\lambda\frac{d\overline{F}[\widetilde{\mathrm{Exp}tX_G}(\alpha)]}{dt}\ \varphi[\alpha^\star]$$

$$+i\lambda\overline{F}[\alpha]$$

$$\times\int_0^{T_\alpha}dv\sum_{\nu=1}^{\dim Q}\frac{\delta l[\rho]}{\delta\rho^\nu(v)}X_G\cdot\eta^\nu(\alpha(v))\mathrm{e}^{i\theta[\alpha^\star]}$$

$$+i\lambda\overline{F}[\alpha]\ i\lambda\overline{G}[\alpha]\ \varphi[\alpha^\star].$$

F と G を交換したものとの差は以下のようになる。

$$\frac{d}{dt}\frac{d}{ds}\varphi[\mathrm{Exp}sX_F\circ\mathrm{Exp}tX_G(\alpha^\star)]|_{s=t=0}$$

$$-\frac{d}{ds}\frac{d}{dt}\varphi[\mathrm{Exp}tX_G\circ\mathrm{Exp}sX_F(\alpha^\star)]|_{s=t=0}$$

$$=\int_0^{T_\alpha}du\sum_{\mu=1}^{\dim Q}\frac{\delta l[\rho]}{\delta\rho^\mu(u)}$$

$$\times(X_G\cdot X_F-X_F\cdot X_G)\cdot\eta^\mu(\alpha(u))$$

$$\times \mathrm{e}^{i\theta[\alpha^\star]}$$

$$+i\lambda\frac{d\overline{F}[\widetilde{\mathrm{Exp}tX_G}(\alpha)]}{dt}\ \varphi[\alpha^\star]$$

$$-i\lambda\frac{d\overline{G}[\widetilde{\mathrm{Exp}sX_F}(\alpha)]}{ds}\ \varphi[\alpha^\star]$$

$$=\int_0^{T_\alpha}du\sum_{\mu=1}^{\dim Q}\frac{\delta l[\rho]}{\delta\rho^\mu(u)}X_{\{G,F\}}\cdot\eta^\mu(\alpha(u))\mathrm{e}^{i\theta[\alpha^\star]}$$

$$+i\lambda\left(\frac{d\overline{F}[\widetilde{\mathrm{Exp}tX_G}(\alpha)]}{dt}-\frac{d\overline{G}[\widetilde{\mathrm{Exp}sX_F}(\alpha)]}{ds}\right)\varphi[\alpha^\star]$$

$$=\frac{d}{ds}\varphi[\widetilde{\mathrm{Exp}sX_{\{G,F\}}}(\alpha^\star)]|_{s=0}$$

$$+i\lambda\left(\frac{d\overline{F}[\widetilde{\mathrm{Exp}tX_G}(\alpha)]}{dt}-\frac{d\overline{G}[\widetilde{\mathrm{Exp}sX_F}(\alpha)]}{ds}\right)\varphi[\alpha^\star]$$

$$-i\lambda\overline{\{G,F\}}[\alpha]\ \varphi[\alpha^\star].$$

(51) から、

$$\frac{d\overline{F}[\widetilde{\mathrm{Exp}tX_G}(\alpha)]}{dt}|_{t=0}$$

$$=\frac{n}{m+n}\overline{\{G,F\}}[\alpha]-\frac{2}{(m+n)T_\alpha}\overline{F}[\alpha]$$

$$+\frac{2F(\alpha(T_\alpha))}{(m+n)T_\alpha}$$

であるから,

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\overline{F}[\widetilde{\mathrm{Expt}X_G(\alpha)}]}{dt} - \frac{d\overline{G}[\widetilde{\mathrm{Exps}X_F(\alpha)}]}{ds} \\
&-\overline{\{G,F\}}[\alpha] \\
=&\frac{n}{m+n}\overline{\{G,F\}}[\alpha] - \frac{2}{(m+n)T_\alpha}\overline{F}[\alpha] \\
&+\frac{2F(\alpha(T_\alpha))}{(m+n)T_\alpha} \\
&-\frac{n}{m+n}\overline{\{F,G\}}[\alpha] + \frac{2}{(m+n)T_\alpha}\overline{G}[\alpha] \\
&-\frac{2G(\alpha(T_\alpha))}{(m+n)T_\alpha} \\
&-\overline{\{G,F\}}[\alpha] \\
=&\frac{n-m}{m+n}\overline{\{G,F\}}[\alpha] \\
&-2\frac{\overline{F}[\alpha]-F(\alpha(T_\alpha))}{(m+n)T_\alpha} + 2\frac{\overline{G}[\alpha]-G(\alpha(T_\alpha))}{(m+n)T_\alpha}.
\end{aligned}
$$

従って，Poisson 括弧を積とする Lie 代数が保存されるためには，

$$m = n \tag{53}$$

かつ

$$n \to \infty \tag{54}$$

であれば良いことがわかる。

すなわち，次のことが示された。$m = n$ として，$n \to \infty$ で

$$[\widetilde{G},\widetilde{F}](\varphi)[\alpha^\star] = \frac{-i}{\lambda}\widetilde{\{G,F\}}(\varphi)[\alpha^\star]. \tag{55}$$

$\lambda = 1/\hbar$ とおくと，$\widetilde{F}$，$\widetilde{G}$ 達は正準交換関係を与えることになる。

$\widetilde{\mathrm{Exps}X_F}(\alpha)$ は，α と $\mathrm{Exps}X_F(\alpha)$ の間を行ったり来たりする軌道であったので，オブザーバブルは完全に $\mathrm{Exps}X_F(\alpha)$ に変換してしまうというよりは，α の持つ安定性，あるいは慣性の効果を加味した変換を生成するということが示唆される。

$\underline{\rho}$ を経由して α_i について $\underline{\beta}$ の測定をする実験が，復元可能な変形は区別できず，かつ準備される状態が理想的，言い換えると純粋状態であるときは，(23) という関係式がなりたてば十分であった。$\varphi^{\rho_k}[\alpha_i{}^\star] = \mathrm{e}^{i\theta^{\rho_k}_{\alpha_i}} l(\rho_k|\alpha_i)$ のようにして汎関数で表現すると，

$$\varphi^{\beta_j}[\alpha_i{}^\star] = \sum_k \varphi^{\beta_j}[\rho_k{}^\star]\varphi^{\rho_k}[\alpha_i{}^\star] \tag{56}$$

となる。$\widetilde{F}$ の線形性から

$$\widetilde{F}(\varphi^{\beta_j})[\alpha_i{}^\star] = \sum_k \varphi^{\beta_j}[\rho_k{}^\star]\widetilde{F}(\varphi^{\rho_k})[\alpha_i{}^\star] \tag{57}$$

となるので，(12) のように定義される $|\rho_i\rangle$ 達が張るベクトル空間の線形写像 $\hat{F}$ がその (j,k) 成分を次のように定義することで与えられる:

$$\langle\rho_j|\hat{F}|\rho_k\rangle := \widetilde{F}(\varphi^{\rho_k})[\rho_j{}^\star]. \tag{58}$$

このようにして，軌道の汎関数上の線形写像がブラベクトルの張る線形空間上の線形写像として表現される。

5．結　論

重要な示唆は多々あるが，謙虚に結論を述べるなら以下の通りである。周期的な軌道に属する状態のアンサンブルに対する物理量の測定が，量子力学的確率で記述されるための十分条件が見出された。その中の本質的な条件は，復元可能な変形は区別されないこと，理想的な測定であるということである。そして，周期的軌道の汎関数上の線形写像としてオブザーバブルが得られ，正準交換関係が成立するための条件が見出された。

〔参考文献〕

[1] 内山　智, “量子力学的確率と整合的な周期的軌道の変形について”, 北星学園大学短期大学部北星論集, **15**, 41–52 (2017).

[2] 明出伊 類似, 尾畑 伸明, (2003)『量子確率論の基礎』, 数理情報科学シリーズ, 牧野書店.

[3] 内山　智, “量子力学的状態について”, 北星学園大学短期大学部北星論集, **10**, 59–65 (2012).

[4] S. Uchiyama, “Local Reality: Can It Exist in the EPR–Bohm Gedanken Ex-

periment?", *Found. Phys.* , **25** (1995) 1561–1575.

[5] ルイジ・アカルディ (著), 松岡 隆志 (訳), (2017)『壺とカメレオン一実在と偶然を巡る量子論の新解釈』, 数理情報科学シリーズ, 牧野書店.

[6] Souriau, J.-M., (1970) *Structure des systèmes dynamiques*, Dunod.

[7] Arnold, V. I., (1978) *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, GTM 60, Springer-Verlag.

[8] Woodhouse, N. M., (1997) Geometric Quantization, Clarendon Press.

[9] 内山　智, "均衡原理と量子力学的確率", 北星学園大学短期大学部北星論集, **9**, 33–41 (2011).

[10] 内山　智, "均衡原理に基づく量子力学的過程による複合系の取り扱い", 北星学園大学短期大学部北星論集, **10**, 13–21 (2012).

[11] 内山　智, "量子力学的過程の測定結果の非局所性について", 北星学園大学短期大学部北星論集, **11**, 67–70 (2013).

[12] 内山　智, "量子力学的過程における局所性について", 北星学園大学短期大学部北星論集, **12**, 37–44 (2014).

[13] 内山　智, "量子力学的状態の周期的軌道としての解釈", 北星学園大学短期大学部北星論集, **13**, 81–86 (2015).